Matematica. — *Mesures dans les espaces produits.* Nota [*] di C. T. IONESCU TULCEA, presentata dal Socio M. PICONE.

1. Soit K un ensemble d'indices et soit pour chaque $s \in K$, X_s un espace et T_s [1] une tribu de parties de X_s. Soit E l'espace produit $\prod_{s \in K} X_s$. Pour toute partie finie (p. f.) $I \subset K$ soit E^I l'espace produit $\prod_{s \in I} X_s$ et BT^I la tribu de parties de E^I engendrée par les parties de le forme $\prod_{s \in I} A_s$ où $A_s \in T_s$. Toute partie de E de la forme $\overset{-1}{pr_I}(A)$ où $A \in AT^I$ sera dite partie cylindrique. Soit T le clan des parties cylindriques. Si W est une famille de parties de E^I, $\overset{-1}{pr_I}(W)$ répresente la famille des parties de E de la torme $\overset{-1}{pr_I}(A)$ avec $A \in W$. Soit maintenant P (A) una mesure définie sur T, dénombrablement additive sur la tribu $\overset{-1}{pr_I}(BT^I)$ quelque soit la p. f. $I \subset K$. Différentes conditions ont été données pour en déduire l'additivité dénombrable de P (A) sur T. Ainsi d'après A. Kolmogoroff, P (A) est dénombrablement additive sur T, si quelque soit $s \in K$, X_s est l'ensemble des nombres réels et T_s la tribu des parties boreliènnes de X_s. En se rapportant à la démonstration de J. L. Doob on voit qu'il suffit que pour tout $s \in K$ l'espace de probabilité $\{X_s, T_s, P(\overset{-1}{pr_s}(A))\}$ soit normal [2]. On sait encore que, sans aucune restriction sur X_s, T_s, on peut conclure que P (A) est dénombrablement additive sur T, si on suppose que pour toute partie de E de la forme $\prod_{s \in K} A_s$ où $A_s = X_s$ sauf pour un nombre fini d'indices, et où, pour $s \in K$ $A_s \in T_s$, $P(\prod_{s \in K} A_s) = \prod_{s \in K} P(\overset{-1}{pr_s}(A_s))$. Mais cette conclusion n'est plus valable [comme il a été montré par E. Sparre Andersen et B. Jessen [3]] si X_s, T_s étant

(*) Pervenuta all'Accademia il 5 settembre 1949.

(1) Soit G un espace. Une famille F de parties de G est appelée un clan si $G \in F$, $G - A \in F$ si $A \in F$ et si, la réunion de A et B appartient à F si $A \in F$, $B \in F$. F est appelée une tribu si F est un clan et si la réunion de toute famille dénombrable de parties appartenant à F appartient a F. Une fonction non négative $m(A)$ définie sur F est appelée une mesure si $m(G) = 1$ et si chaque fois qu'un ensemble $A \in F$ est réunion de deux ensembles A_1, A_2 de F, disjoints, on a $m(A) = m(A_1) + m(A_2) \cdot m(A)$ est dénombrablement additive si chaque fois qu'une partie $A \in F$ est réunion d'une famille dénombrable d'ensembles $A_i \in F$, deux à deux sans point commun, $m(A) = \sum_i m(A_i) \cdot pr_I$ répresente la proection de E sur E^I.

(2) Pour le théorème de KOLMOGOROFF voir *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, pp. 29–30. Pour celui de DOOB, *Stochastic processes with an integral valued parameter*. « Transaction of the Amer. Math. Soc. », *44* (1938). (Ce Mémoire sera désigné dans la suite par S).

(3) *On the introduction of measures in infinite product space.* « Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. », *25*, n. 4 (1948). (Cité d'après « Math. Reviews »).

quelconques on ne fait aucune autre hypothèse sur P (A) en dehors de l'additivité dénombrable sur la tribu $\overset{-1}{pr_{\mathrm{I}}}(\mathrm{BT}^{\mathrm{I}})$ pour toute p. f. $\mathrm{I} \subset \mathrm{K}$. Le but de cette Note est d'indiquer une condition, différente des précédentes, qui assure l'additivité dénombrable de P (A) sur T.

2. Considérons l'espace E [4], le clan T et soit P (A) une mesure définie sur T, dénombrablement additive sur la tribu $\overset{-1}{pr_{\mathrm{I}}}(\mathrm{BT}^{\mathrm{I}})$ quelque soit la p. f. $\mathrm{I} \subset \mathrm{K}$. Il existe [5] pour toute p. f. $\mathrm{I} \subset \mathrm{K}$ et $\iota \in \mathrm{K}$ une fonction $\mathrm{P}\{z^{\mathrm{I}}, \overset{-1}{pr_{\iota}}(\mathrm{A})\}$ définie sur $\mathrm{E}^{\mathrm{I}} \times \mathrm{T}_{\iota}$ qui vérifie quelque soit $\mathrm{M} \in \mathrm{BT}^{\mathrm{I}}$ les égalitées

$$\int_{\mathrm{M}} \mathrm{P}\{z^{\mathrm{I}}, \overset{-1}{pr_{\iota}}(\mathrm{A})\}\, \mathrm{P}_{\mathrm{I}}(dz^{\mathrm{I}}) = \mathrm{P}(\overset{-1}{pr_{\mathrm{I}}}(\mathrm{M}) \cdot \overset{-1}{pr_{\iota}}(\mathrm{A}))$$

où $\mathrm{P}_{\mathrm{I}}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\overset{-1}{pr_{\mathrm{I}}}(\mathrm{A}))$ pour $\mathrm{A} \in \mathrm{BT}^{\mathrm{I}}$. La fonction $\mathrm{P}\{z^{\mathrm{I}}, \overset{-1}{pr_{\iota}}(\mathrm{A})\}$ appelée aussi *mesure conditionnée* sera dite *régulière* s'il existe une fonction $\mathrm{P}(z^{\mathrm{I}}, \mathrm{A})$ définie sur $\mathrm{E}^{\mathrm{I}} \times \mathrm{T}_{\iota}$ mesurable BT^{I} comme fonction de z^{I}, dénombrablement additive comme fonction de A avec $\mathrm{P}(z^{\mathrm{I}}, \mathrm{X}_{\iota}) = 1$ quelque soit $z^{\mathrm{I}} \in \mathrm{E}^{\mathrm{I}}$, telle que $\mathrm{P}\{z^{\mathrm{I}}, \overset{-1}{pr_{\iota}}(\mathrm{A})\} = \mathrm{P}(z^{\mathrm{I}}, \mathrm{A})$ exceptant les points z^{I} appartenant a une partie $\mathrm{E}_0 \in \mathrm{BT}^{\mathrm{I}}$ de P_{I} mesure nulle.

Ces définitions étant données on peut ennoncer le théorème suivant: (A) *Soit l'espace* E, *le clan* T *et la mesure* P (A) *définie sus* T, *dénombrablement additive sur la tribu* $\overset{-1}{pr_{\mathrm{I}}}(\mathrm{BT}^{\mathrm{I}})$ *quelque soit la p. f.* $\mathrm{I} \subset \mathrm{K}$. *Si* $\mathrm{K} = (0, 1, \cdots, n, \cdots)$ *et si quelque soit* $n \in \mathrm{K}$, *la mesure conditionnée* $\mathrm{P}\{z^{(0,1,\cdots,n)}, \overset{-1}{pr_{n+1}}(\mathrm{A})\}$ *est régulière,* P (A) *est dénombrablement additive sur* T.

DÉMONSTRATION. – Il suffit de montrer que pour toute suite de parties $\mathrm{H}_0 \supset \mathrm{H}_1 \supset \cdots \supset \mathrm{H}_n \supset \cdots$ appartenant au clan T, l'existence d'un nombre positif r satisfaisant les inégalitées $\mathrm{P}(\mathrm{H}_i) \geqq r$ pour $i = 0, 1, \cdots$ implique l'existence d'un element $\bar{z}$ appartenant à l'intersection des parties H_i. On peut supposer, et on va le faire dans ce qui suit, que $\mathrm{H}_i = \overset{-1}{pr_{(0,\ldots,i)}}(\overline{\mathrm{H}}_i)$ où $\overline{\mathrm{H}}_i \in \mathrm{BT}^{(0,\cdots,i)}$. Désignons par $\mathrm{C}_i(x_0, \cdots, x_i)$ la fonction caracteristique de $\overline{\mathrm{H}}_i$. Soit pour tout $n \in \mathrm{K}$, $\mathrm{P}(x_0, \cdots, x_n, \mathrm{A})$ la fonction à l'aide de laquelle on définit la régularité de $\mathrm{P}\{z^{(0,\cdots,n)}, \overset{-1}{pr_{n+1}}(\mathrm{A})\}$. On a (les mesures conditionnées étant régulières la formule se démontre aisément),

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_i) = \int_{\mathrm{X}_0} \mathrm{P}_0(dx_0) \int_{\mathrm{X}_1} \mathrm{P}(x_0, dx_1) \int_{\mathrm{X}_2} \cdots \int_{\mathrm{X}_i} \mathrm{P}(x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, dx_i)\, \mathrm{C}_i(x_0, x_1, \cdots, x_i)$$

(4) $\mathrm{E}, \mathrm{E}^{\mathrm{I}}, \mathrm{BT}^{\mathrm{I}}, \mathrm{BT}, \mathrm{T}$ representent les espaces et les familles de parties introduites dans le premier paragraphe; z^{I} represente l'élément dans E^{I} et z l'élément dans E.

(5) Voir aussi S, pp. 95–96. La notion de mesure conditionnée régulière est due à Doob.

où $P_0(A) = P(\overset{-1}{pr_0}(A))$ pour $A \in BT^0$. Posons pour tout $n \in K$,

$$R(x_0, \cdots, x_n, i) =$$
$$= \int_{X_{n+1}} P(x_0, \cdots, x_n, dx_{n+1}) \int_{X_{n+2}} \cdots \int_{X_i} P(x_0, \cdots, x_{i-1}, dx_i)\, C_i(x_0, \cdots, x_i)$$

si $i = n + 1, \cdots$ et $R(x_0, \cdots, x_n, n) = C_n(x_0, \cdots, x_n)$. Evidemment $R(x_0, \cdots, x_n, i) \geqq R(x_0, \cdots, x_n, i+1)$ quelque soit $i = n, n+1, \cdots$ et

$$\int_{X_{n+1}} R(x_0, \cdots, x_{n+1}, i)\, P(x_0, \cdots, x_n, dx_{n+1}) = R(x_0, \cdots, x_n, i) \tag{2.1}$$

si $i = n + 1, \cdots$. On a aussi

$$\int_{X_0} P_0(dx_0)\, R(x_0, i) = P(H_i) \qquad (i = 0, 1, \cdots). \tag{2.2}$$

Nous allons démontrer maintenant qu'il existe una suite $\xi = \{\bar{x}_i\}$ $(i \in K)$ appartenant à E telle que quelque soit $n = 0, 1, \cdots$ et $i \geqq n$ on a $R(\bar{x}_0, \cdots, \bar{x}_n, i) \geqq r$. En particulier, il s'ensuit alors $C_i(\bar{x}_0, \cdots, \bar{x}_i) \geqq r$ c'est-à-dire $C_i(\bar{x}_0, \cdots, x_i) = 1$; donc ξ appartient à l'intersection des parties H_i. On a $R(x_0, i) \geqq R(x_0, i+1)$ pour tout $i = 0, 1, \cdots$. Soit $R(x_0, \infty) = \lim_i R(x_0, i)$. En tenant compte des égalitées (2. 2) on obtient

$$\int_{X_0} P_0(dx_0)\, R(x_0, \infty) \geqq r.$$

Il s'ensuit qu'il existe $\bar{x}_0$ tel que $R(\bar{x}_0, \infty) \geqq r$, donc tel que $R(\bar{x}_0, i) \geqq r$ quelque soit $i = 0, 1, \cdots$. Supposons maintenant qu'on a determiné aussi les points $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n$ $(x_i \in X_i)$ tels que $R(\bar{x}_0, \cdots, \bar{x}_j, i) \geqq r$ pour $j = 0, \cdots, n$ et $i \geqq j$. Nous allons chercher un point $\bar{x}_{n+1} \in X_{n+1}$, tel que $R(\bar{x}_0, \cdots, \bar{x}_{n+1}, i) \geqq r$ si $i = n + 1, \cdots$. Soit $R(x_0, \cdots, x_{n+1}, \infty) = \lim_i R(x_0, \cdots, x_{n+1}, i)$. D'après (2. 1)

$$\int_{X_{n+1}} P(\bar{x}_0, \cdots, \bar{x}_n, dx_{n+1})\, R(\bar{x}_0, \cdots, \bar{x}_n, x_{n+1}, \infty) \geqq r.$$

En raisonant comme plus haut on trouvera le $\bar{x}_{n+1}$ cherché. Ainsi on determinera de proche en proche la suite $\xi = \{\bar{x}_i\}$ $(i \in K)$.

Remarques. – Les fonctions R sont analogues aux fonctions W et S de S. Banach [6]. Le théorème (A) peut être utilisé dans la détermination de certaines processus stochastiques ayant des probabilitées conditionnées données (S, pp. 102–103).

3. On peut encore démontrer, par la methode précédement employé le théorème suivant: (B) *Soit l'espace* E, *le clan* T *et soit* P (A) *une mesure definie*

(6) *On measures in independent fields*. « Studia Mathematica », Tom X (1948).

sur T *dénombrablement additive sur la tribu* $\overset{-1}{pr_I}(BT^I)$ *quelque soit la p. f.* $I \subset K$. *Si quelque soit la p. f.* $I \subset K$ *et* $t \in K - I$ *la mesure conditionnée* $P\{z^I, \overset{-1}{pr_t}(A)\}$ *est régulière*, P(A) *est dénombrablement additive sur* T.

Observons que si $P(\prod_{s \in K} A_s) = \prod_{s \in K} P(\overset{-1}{pr_s}(A_s))$ où $A_s = X_s$ sauf pour un nombre fini d'indices s et $A_s \in T_s$ pour tout s, on peut prendre pour $P\{z^I, \overset{-1}{pr_t}(A)\}$ la mesure $P(\overset{-1}{pr_t}(A))$. Donc le théorème cité dans le premier paragraphe correspondant à des pareilles mesures est un cas particulier du précédent.

4. Soit B la tribu de parties boreliènnes de l'intervalle (0, 1) et soit X un espace, F une tribu de parties de X et $m(A)$ une mesure dénombrablement additive sur F. L'espace de probabilité $\{X, F, m\}$ est appelée *normal* s'il existe une tribu $L \subset F$ strictement séparable tel tel que j) pour toute partie $A \in F$ on peut trouver une partie $A_1 \in L$ telle que $A_1 \supset A$ et $m(A_1 - A) = 0$ jj) il existe une application biunivoque $g(X)$ de X dans (0, 1) L mesurable et une partie $X_0 \in L$ de mesure nulle telle que la famille de parties $\{\overset{-1}{g}(A) ; A \in B\}$ coïncide avec L et $g(X - X_0) \in B$. L'espace de probabilité $\{X, F, m\}$ est appelée *strictement normal* si on peut prendre pour L la tribu F lui même. Soit maintenant l'espace E, le clan T et soit P(A) une mesure définie sur T, dénombrablement additive sur la tribu $\overset{-1}{pr_I}(BT^I)$ quelque soit la partie finie $I \subset K$. On a le théorème suivant:

(C) *Si, quelque soit* $s \in K$, *l'espace de probabilité* $\{X_s, T_s, P(\overset{-1}{pr_s}(A))\}$ *est normal*, P(A) *est dénombrablement additive sur* T. On peut obtenir la démonstration de ce théorème soit par la méthode de J. L. Doob (S, pp. 91-93) soit en utilisant te théorème (B) (7).

Remarques. – La définition de normalité donnée ci dessus est essentielement la même que celle de Paul R. Halmos et John von Neumann (8). Elle a été donnée de telle façon, seulement pour que le théorème de Kolmogoroff soit un cas particulier du théorème (C).

Note ajoutée à la corection des épreuves (9 dicembre 1949). - Dans le mémoire que j'avais cité d'après « Math. Rew. » et dont je viens de prendre connaissance integralement d'après un tirage à part, est annoncé un travail de MM. Doob et Jessen concernant les mesures sur les espaces produit, ayant des mesures conditionnées régulières.

(7) On suppose d'abord les espaces $\{X_s, \cdots\}$ strictement normaux et on déduit le théorème (C) de celui de Kolomogoroff; on peut aussi observer que les hypothèses faites impliquent la régularité des mesures conditionnées (voir aussi PAUL R. HALMOS, *On a theorem of Dieudonné*. « Proc. Nat. Acad. U. S. A. », *35* (1) (1949) et par suite on peut déduire le théorème (C) du théorème (B). Les cas général (où les espaces $\{X_s, \cdots\}$ sont normaux) se déduit de celui-ci.

(8) *Operator methods in classical mechanics*, II. « Annals of Math. », *43* (2) (1942).