

ISTITUTO PER LE APPLICAZIONI DEL CALCOLO

# Calcolo approssimato per le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari

Nota di GIANFRANCO CIMMINO (Napoli)

Il prof. Gianfranco Cimmino è da considerarsi, anche, uno dei fautori dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo al quale prestò una assidua e proficua opera di assistenza durante il periodo embrionale dell'Istituto stesso, trascorso a Napoli, nel Gabinetto annesso a quella Cattedra di Calcolo infinitesimale, dal 1928-VI al 1932-X. Verso la fine di tale periodo il prof. Cimmino escogitò un metodo numerico di approssimazione delle soluzioni dei sistemi di equazioni lineari che egli mi ha richiamato alla memoria in questi giorni in seguito alla pubblicazione del dott. Cesari, recentemente apparsa (cfr. la « Ricerca Scientifica », Serie II, Vol. I, n. 11-12, e la « Rassegna delle Poste, dei Telegrafi e dei Telefoni », fasc. 4, 1937), nella quale è data una sistemazione dei sopradetti metodi di calcolo che, però, non contempla quello sopradetto del Cimmino, metodo che, secondo il mio avviso, è degnissimo di essere tenuto presente nelle applicazioni e per la sua grande generalità e per la rapidità di calcolo numerico delle successive approssimazioni, ed, infine, per la sua assicurata convergenza che, in molti casi, può dare al metodo il necessario carattere di praticità.

Ritengo, perciò, utile pubblicare in questa Rivista la nota del prof. Cimmino relativa al suo sopradetto metodo, nota che egli ha accondisceso a redigere per mio insistente invito.

MAURO PICONE

## 1. POSIZIONE DELLE APPROSSIMAZIONI.

Sia dato il sistema di equazioni lineari

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n a_{hk} x_k = b_h, \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Pensiamo le (1) come equazioni di  $n$  iperpiani in  $S_n$ . Al fine di determinare un punto  $O \equiv \xi_k$  comune ad essi, stabiliamo le seguenti approssimazioni successive. Preso, come prima approssimazione, un punto arbitrario  $P_0 \equiv x_k^{(0)}$  di  $S_n$ , consideriamo il suo simmetrico rispetto all'iperpiano (1), per  $h = 1, 2, \dots, n$ ,

$$(2) \quad x_k^{(0)} - 2 a_{hk} \frac{\sum_{i=1}^n a_{hi} x_i^{(0)} - b_h}{\sum_{i=1}^n a_{hi}^2}, \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Fissiamo poi  $n$  quantità positive arbitrarie  $m_1, m_2, \dots, m_n$  e assumiamo, come seconda approssimazione  $P_1 \equiv x_k^{(1)}$ , il baricentro del sistema formato dalle  $n$  masse  $m_h$  poste ordinatamente negli  $n$  punti (2)

$$(3_1) \quad x_k^{(1)} = x_k^{(0)} - \frac{2}{\sum_{h=1}^n m_h} \sum_{h=1}^n m_h a_{hk} \frac{\sum_{i=1}^n a_{hi} x_i^{(0)} - b_h}{\sum_{i=1}^n a_{hi}^2}, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

In generale, consideriamo le approssimazioni successive

$$(3_\nu) \quad x_k^{(\nu)} = x_k^{(\nu-1)} - \frac{2}{\sum_{h=1}^n m_h} \sum_{h=1}^n m_h a_{hk} \frac{\sum_{i=1}^n a_{hi} x_i^{(\nu-1)} - b_h}{\sum_{i=1}^n a_{hi}^2}, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

le quali sono suggerite dalla semplice osservazione che, se gli iperpiani (1) hanno un punto  $O \equiv \xi_k$  in comune, il punto  $P_0$  e gli  $n$  simmetrici (2) staranno su una medesima ipersfera di centro in  $O$ , sicchè il punto  $P_1$  dato da (3<sub>1</sub>) dovrà cadere internamente a questa ipersfera, cioè dovrà avere dal punto cercato  $O$  una distanza minore di quella del punto di partenza  $P_0$ , e così il punto  $P_\nu$  dato da (3<sub>ν</sub>) cadrà sempre più vicino a  $O$ .

## 2. CASO DELLA COMPATIBILITÀ.

Se il sistema (1) è compatibile e la caratteristica della matrice  $\| a_{hk} \|$  è maggiore di uno, le  $x_k^{(\nu)}$  convergono, per  $\nu \rightarrow \infty$ , verso una soluzione del sistema.

Notiamo anzitutto come sia evidente la necessità della condizione che la caratteristica della matrice  $\| a_{hk} \|$  sia maggiore di uno, perchè, se gli iperpiani (1) coincidono in un unico, le nostre approssimazioni successive forniranno alternativamente il punto di partenza  $P_0$  e il suo simmetrico rispetto a quell'iperpiano.

Sia ora  $O \equiv \xi_k$  un punto, soluzione del sistema (1). Le (3<sub>ν</sub>) si possono dunque scrivere

$$(3'_\nu) \quad x_k^{(\nu)} - \xi_k = x_k^{(\nu-1)} - \xi_k - \frac{2}{\sum_{h=1}^n m_h} \sum_{h=1}^n m_h a_{hk} \frac{\sum_{i=1}^n a_{hi} (x_i^{(\nu-1)} - \xi_i)}{\sum_{i=1}^n a_{hi}^2}.$$

Quadrando e sommando rispetto a  $k$  da 1 ad  $n$ , indi facendo le posizioni

$$(4) \quad \chi_k = \frac{\sum_{i=1}^n a_{ki} (x_i^{(v-1)} - \xi_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ki}^2}}, \quad \theta_{hl} = \frac{\sum_{i=1}^n a_{hi} a_{li}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_{hi}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{li}^2}},$$

otteniamo

$$(5) \quad \begin{aligned} \overline{OP}_v^2 &= \sum_{k=1}^n (x_k^{(v)} - \xi_k)^2 = \sum_{k=1}^n (x_k^{(v-1)} - \xi_k)^2 - \\ &- \frac{4}{\sum_{h=1}^n m_h} \sum_{k=1}^n (x_k^{(v-1)} - \xi_k) \sum_{h=1}^n m_h a_{hk} \frac{\sum_{i=1}^n a_{hi} (x_i^{(v-1)} - \xi_i)}{\sum_{i=1}^n a_{hi}^2} + \\ &+ \frac{4}{\left(\sum_{h=1}^n m_h\right)^2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n m_h a_{hk} \frac{\sum_{i=1}^n a_{hi} (x_i^{(v-1)} - \xi_i)}{\sum_{i=1}^n a_{hi}^2} \\ &\quad \sum_{l=1}^n m_l a_{lk} \frac{\sum_{i=1}^n a_{li} (x_i^{(v-1)} - \xi_i)}{\sum_{i=1}^n a_{li}^2} = \\ &= \overline{OP}_{v-1}^2 - \frac{2}{\left(\sum_{h=1}^n m_h\right)^2} \sum_{h=1}^n \sum_{l=1}^n m_h m_l (\gamma_h^2 + \gamma_l^2 - 2\theta_{hl} \gamma_h \gamma_l), \end{aligned}$$

onde, essendo le  $m_k$  positive per ipotesi e  $|\theta_{hl}| \leq 1$  in virtù di una nota di-suguaglianza, si deduce che

$$(6) \quad \overline{OP}_v^2 \leq \overline{OP}_{v-1}^2,$$

come era appunto da attendersi, per la considerazione geometrica premessa.

Vediamo ora quando è che nella (6) può sussistere il segno uguale. Intanto, poichè evidentemente

$$(7) \quad \chi_h^2 + \chi_l^2 - 2\theta_{hl} \chi_h \chi_l \geq (|\chi_h| - |\chi_l|)^2$$

bisognerà che  $|\chi_k|$  sia indipendente da  $k$ . Detto  $c$  il suo valore, dalla (5) risulterà

$$(8) \quad \overline{OP}_v^2 \leq \overline{OP}_{v-1}^2 - \frac{4c^2}{\left(\sum_{h=1}^n m_h\right)^2} \sum_{h=1}^n \sum_{l=1}^n (1 - |\theta_{hl}|) m_h m_l.$$

Ma  $|\theta_{hl}|$  può diventare = 1 soltanto se le  $a_{h_1}, a_{h_2}, \dots, a_{h_n}$  riescono proporzionali alle  $a_{l_1}, a_{l_2}, \dots, a_{l_n}$ , e ciò non può verificarsi per ogni coppia di indici  $h, l$ , poichè la matrice  $\|a_{hk}\|$  è stata supposta di caratteristica  $> 1$ . Dunque, perchè sussista il segno = in (6), bisogna che tutte le  $\chi_k$  siano zero, cioè le  $x_i^{(v-1)}$  devono, al pari delle  $\xi_i$ , verificare il sistema (1), e di conseguenza, per  $(3_v)$ , le  $x_i^{(v)}$  devono coincidere con le  $x_i^{(v-1)}$ .

Pertanto, escluso il caso che, dopo un numero finito di approssimazioni, si trovi una soluzione del sistema (nel qual caso tutte le susseguenti approssimazioni coincidono sempre con tale soluzione), varrà la (6), col segno  $<$ , per tutti i valori di  $v$ .

Ciò posto, poichè dunque tutti i punti  $P_v$  stanno entro la sfera di centro  $O$  e raggio  $\overline{OP}_0$ , il loro insieme ammette certamente un punto d'accumulazione  $P \equiv x_k$ . Se diciamo  $P_{v_s-1}$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) una successione estratta da quella dei punti  $P_v$  e convergente al punto  $P \equiv x_k$ , i punti  $P_{v_s}$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) convergeranno pure, in forza di  $(3'_v)$ , e precisamente verso il punto  $P^* \equiv x_k^*$  definito da

$$(9) \quad x_k^* - \xi_k = x_k - \xi_k - \frac{2}{\sum_{h=1}^n m_h} \sum_{h=1}^n m_h a_{hk} \frac{\sum_{i=1}^n a_{hi} (x_i - \xi_i)}{\sum_{i=1}^n a_{hi}^2}.$$

Ragionando sulla (9) come prima abbiamo fatto sulla  $(3'_v)$ , vediamo che, se  $x_k$  non fosse una soluzione del sistema (1), dovrebbe essere  $\overline{OP}^* < \overline{OP}$ , e quindi, non appena  $r$  ed  $s$  siano abbastanza grandi, anche  $\overline{OP}_{v_r} < \overline{OP}_{v_s-1}$ , giacchè  $P_{v_r} \rightarrow P^*$ ,  $P_{v_s-1} \rightarrow P$ . Ma ciò è impossibile, perchè quando  $r = s - 1$ , si ha  $v_r = v_{s-1} \leq v_s - 1$ , e quindi  $\overline{OP}_{v_r} \geq \overline{OP}_{v_s-1}$ , in base a (6).

Pertanto  $P \equiv x_k$  è necessariamente una soluzione del sistema (1). E allora, per quanto abbiamo provato, la distanza  $\overline{PP}_v$  sarà decrescente al crescer di  $v$ ; e poichè sappiamo che esiste una successione estratta da quella

dei punti  $P_\nu$ , che ha per punto limite  $P$ , concludiamo che  $P$  è anche l'unico punto limite della successione di punti  $P_\nu$ .

### 3. CASO DELLA INCOMPATIBILITÀ.

Le approssimazioni successive (3<sub>ν</sub>) convergono anche quando il sistema (1) non è compatibile, purchè la caratteristica di  $\|a_{hk}\|$  sia  $> 1$ .

Ciò risulta dall'osservazione che, per la validità del ragionamento del numero prec., non è necessario che il punto  $O \equiv \xi_k$  sia una soluzione del sistema (1), basta bensì che sia

$$(10) \quad \sum_{h=1}^n m_h a_{hk} \frac{\sum_{i=1}^n a_{hi} \xi_i - b_h}{\sum_{i=1}^n a_{hi}^2} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

ora noi mostreremo come questo sistema ammetta sempre soluzione, anche quando le (11) sono incompatibili.

Supponiamo dunque che il determinante  $A = |a_{hk}|$  sia eguale a zero e che sia diverso da zero il minore  $A_p$  formato con le prime  $p$  linee e  $p$  colonne. Esisteranno allora dei numeri  $\lambda_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, n - p; j = 1, 2, \dots, p$ ), per cui

$$(11) \quad a_{hk} = \sum_{j=1}^p \lambda_{k-p, j} a_{hj}, \quad (h = 1, 2, \dots, n; k = p + 1, p + 2, \dots, n),$$

e d'altra parte, delle equazioni (10) le ultime  $n - p$  saranno conseguenza delle prime  $p$ .

Consideriamo quindi le (10) soltanto per  $k = 1, 2, \dots, p$  e sostituiamo al posto delle  $a_{hk}$  con  $k > p$  le sommatorie (11). Introducendo inoltre le nuove incognite  $\sigma_h$  definite da

$$(12) \quad \sigma_h = x_h + \sum_{i=1}^{n-p} \lambda_{ih} x_{p+i}, \quad (h = 1, 2, \dots, p),$$

il sistema (10) diventerà

$$(13) \quad \sum_{h=1}^n m_h a_{hk} \frac{\sum_{j=1}^n a_{hj} \sigma_j - b_h}{\sum_{i=1}^n a_{hi}^2} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Questo, pensato come un sistema di  $p$  equazioni nelle  $p$  incognite  $\sigma_j$ , è certamente risolubile, perchè il determinante dei coefficienti è

$$\prod_{h=1}^n \frac{m_h}{\sum_{i=1}^n a_{hi}^2} \left\| \begin{array}{c} a_{11}, \dots, a_{n1} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{1p}, \dots, a_{np} \end{array} \right\|^2,$$

e quindi positivo, avendosi, per ipotesi,  $A_p \neq 0$ .

Ricavate le  $\sigma_j$  dalle (13), cerchiamo di determinare  $p$  quantità  $t_1, t_2, \dots, t_p$ , in modo tale che le  $x_h$  definite da

$$(14) \quad x_h = x_h^{(0)} + \sum_{k=1}^p a_{kh} t_k, \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

messe al posto delle  $\xi_h$  nelle (10), le rendano soddisfatte. Affinchè ciò avvenga, essendo le  $\sigma_h$  soluzioni di (13), basta che valgano le (12). Ora le (12), per (14) e (11), diventano

$$(15) \quad \sigma_h = x_h^{(0)} + \sum_{k=1}^p a_{kh} t_k + \sum_{i=1}^{n-p} \lambda_{ih} \sum_{k=1}^p a_{k, p+i} t_k + \sum_{i=1}^{n-p} \lambda_{ih} x_{p+i}^{(0)}$$

$$x_h^{(0)} + \sum_{k=1}^p a_{kh} t_k + \sum_{i=1}^{n-p} \lambda_{ih} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^p \lambda_{ij} a_{kj} t_k + \sum_{i=1}^{n-p} \lambda_{ih} x_{p+i}^{(0)},$$

$$(h = 1, 2, \dots, p),$$

e questo è un sistema di  $p$  equazioni nelle  $p$  incognite  $t_k$ , col determinante

$$\left| a_{kh} + \sum_{i=1}^{n-p} \sum_{j=1}^p \lambda_{ih} \lambda_{ij} a_{kj} \right| = \left| a_{kj} \right| \cdot \left| \delta_{jh} + \sum_{i=1}^{n-p} \lambda_{ij} \lambda_{ih} \right|,$$

$$\left( \begin{array}{l} h, k, j = 1, 2, \dots, p; \\ \delta_{jh} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} = 0, \text{ se } j \neq h \\ = 1, \text{ se } j = h \end{array} \right\},$$

certainemente diverso da zero.

#### 4. MAGGIORAZIONE DELL'ERRORE.

Supponiamo ora che il determinante  $A = |a_{hk}|$  sia diverso da zero, e mostriamo come si possa facilmente conseguire una formola di maggiorazione dell'errore commesso alla  $v$ -esima approssimazione in rapporto allo errore iniziale.

Riprendiamo la (5), osservando che l'espressione

$$(16) \quad \frac{2}{\left(\sum_{h=1}^n m_h\right)^2} \sum_{h=1}^n \sum_{l=1}^n m_h m_l (\chi_h^2 + \chi_l^2 - 2\theta_{hl} \chi_h \chi_l),$$

essendovi, nel caso attuale, una sola soluzione del sistema (1), può annullarsi soltanto a patto che siano tutte zero le differenze  $x_k^{(\nu-1)} - \xi_k$ . La (16) è quindi una forma quadratica definita positiva nelle  $x_k^{(\nu-1)} - \xi_k$ . Detta  $\rho$  la sua più piccola radice caratteristica, sarà allora, in base a (15),

$$(17) \quad \overline{OP}_\nu^2 \leq (1 - \rho) \overline{OP}_{\nu-1}^2 \leq (1 - \rho)^\nu \overline{OP}_0^2.$$

Allo stesso modo si riconosce che

$$(18) \quad \overline{P}_\nu \overline{P}_{\nu-1}^2 \leq (1 - \rho) \overline{P}_{\nu-1} \overline{P}_{\nu-2}^2,$$

onde, più rapidamente che nel n.° 2, ma nell'ipotesi restrittiva  $|A| \neq 0$ , discende la convergenza della successione di punti  $P_\nu$ .

##### 5. ESTENSIONE ALLE EQUAZIONI INTEGRALI.

L'estensione formale del metodo di approssimazioni successive del numero 1 al caso di una equazione integrale di prima specie è immediata. Data l'equazione

$$(19) \quad \int_a^b A(x, y) \varphi(y) dy = f(x),$$

porremo, partendo da una funzione  $\varphi_0(x)$ , scelta a piacere come prima approssimazione, e indicando con  $m(x)$  una funzione peso sempre positiva,

$$(20) \quad \varphi_\nu(x) = \varphi_{\nu-1}(x) -$$

$$- \frac{2}{\int_a^b m(s) ds} \int_a^b m(s) A(s, x) \frac{\int_a^b A(s, t) \varphi_{\nu-1}(t) dt - f(s)}{\int_a^b A^2(s, t) dt} ds.$$

Ammissa l'esistenza di una soluzione  $g(x)$  di (19) e facendo le posizioni, analoghe alle (4),

$$\chi(s) = \frac{\int_a^b A(s, t) [\varphi_{\nu-1}(t) - g(t)] dt}{\sqrt{\int_a^b A^2(s, t) dt}},$$

$$\theta(r, s) \equiv \frac{\int_a^b A(r, x) A(s, x) dx}{\sqrt{\int_a^b A^2(r, t) dt} \sqrt{\int_a^b A^2(s, t) dt}},$$

si trova

$$\int_a^b [\varphi_\nu(x) - g(x)]^2 dx = \int_a^b [\varphi_{\nu-1}(x) - g(x)]^2 dx - \frac{2}{\left(\int_a^b m(s) ds\right)^2} \int_a^b \int_a^b m(r) m(s) [\chi^2(r) + \chi^2(s) - 2\theta(r, s) \chi(r) \chi(s)] dr ds,$$

dove, se  $A(x, y)$  non è il prodotto di una funzione di sola  $x$  per una funzione di sola  $y$ , l'integrale doppio può annullarsi soltanto a patto che  $\chi(s)$  sia identicamente zero, e se, più particolarmente, il nucleo  $A(x, y)$  è chiuso, può annullarsi solo se  $\varphi_{\nu-1}(t) - g(t) \equiv 0$ .

Ne segue, in quest'ultima ipotesi, che il nucleo simmetrico

$$\frac{2}{\left(\int_a^b m(t) dt\right)^2} \int_a^b \int_a^b m(r) m(s) \left[ \frac{A(r, x) A(r, y)}{\int_a^b A^2(r, t) dt} + \frac{A(s, x) A(s, y)}{\int_a^b A^2(s, t) dt} - 2\theta(r, s) \frac{A(r, x) A(s, y)}{\sqrt{\int_a^b A^2(r, t) dt} \sqrt{\int_a^b A^2(s, t) dt}} \right] dr ds$$

è definitivo positivo e, detto  $\rho$  il suo più piccolo autovalore, riesce (in analogia a (18))

$$\int_a^b [\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu-1}(x)]^2 dx \leq (1 - \rho) \int_a^b [\varphi_{\nu-1}(x) - \varphi_{\nu-2}(x)]^2 dx,$$

onde discende in ogni caso la convergenza in media delle  $\varphi_\nu(x)$ , e inoltre (in analogia a (17))

$$\int_a^b [\varphi_\nu(x) - g(x)]^2 dx \leq (1 - \rho)^\nu \int_a^b [\varphi_0(x) - g(x)]^2 dx,$$

onde risulta che, supposta l'esistenza della soluzione  $g(x)$ , le  $\varphi_\nu(x)$  convergeranno in media proprio verso di essa.