Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XVII, № 6

MATHÉMATIQUES

SUR QUELQUES MODIFICATIONS DE L'INEGALITÉ DE TCHEBYCHEFF

Par S. BERNSTEIN, de l'Académie

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ une suite de grandeurs aléatoires telles que l'espérance mathématique conditionnelle $\mathfrak{M}_{(i)}(z_{i+1})=0$, quelles que soient les valeurs des grandeurs antérieures $z_1, z_2, \ldots, z_i$. Dans ces conditions la dispersion de la somme $\sum_{i=1}^{n} z_i$ est égale à $B_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$, où $\beta_i = \mathfrak{M}z_i^2$.

On peut démontrer les propositions suivantes au sujet des sommes de ces grandeurs z_i.

Théorème 1. *La probabilité que toutes les inégalités*

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_i| \leqslant t\sqrt{B_n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

seront réalisées simultanément est supérieure à $1 - \frac{1}{t^2}$.

Je ne m'arrêterai pas sur la démonstration de ce théorème présentant une généralisation directe de l'inégalité classique de Tchebycheff, car celle-ci est plus simple et entièrement analogue à la démonstration du théorème suivant qui correspond à une des modifications de l'inégalité mentionnée que j'ai donnée autrefois.

Théorème II. *Soit* $\beta_{k,\,k-1} = \mathfrak{M}_{(k-1)}z_k^2$ *la dispersion conditionnelle de* z_k, *lorsque* $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}$ *sont données; soit*

$$\frac{\beta_{k,\,k-1}}{\beta_k} \leqslant R_k\,. \tag{2}$$

S'il existe un nombre H *tel que*

$$\mathfrak{M}_{(k-1)}\, z_k^l \leqslant \frac{\beta_{k,\,k-1}}{2} H^{l-2}\, l\,! \tag{3}$$

la probabilité P *de la réalisation simultanée de toutes les inégalités*

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_i < 2t\sqrt{B_n'} \tag{4}$$

est supérieure à $1 - e^{-t^2}$, pourvu que $0 < t \leqslant \frac{\sqrt{B_n'}}{2H}$, où $B_n' = \sum_{i=1}^{n} R_i\beta_i$.

En effet, soit $\varepsilon > 0$ et soit Q_i la probabilité de la réalisation simultanée de l'inégalité

$$e^{\varepsilon(z_1+z_2+\ldots+z_i)} \geqslant L \tag{5}$$

avec les inégalités

$$e^{\varepsilon(z_1+\ldots+z_k)} < L \qquad (k < i), \tag{6}$$

de sorte que

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i \tag{7}$$

représente la probabilité qu'il y aura au moins une valeur $i \leqslant n$ pour laquelle l'inégalité (5) sera réalisée.

Soit

$$I = \mathfrak{M}(e^{\varepsilon(z_1+z_2+\ldots+z_n)}) \tag{8}$$

et soient $z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, \ldots, z_i^{(i)}$ une certaine succession de valeurs de $z_1, z_2 \ldots, z_i$ satisfaisant aux inégalités (5) et (6); dans ces conditions les termes correspondants de I peuvent être mis sous la forme

$$p_i \, e^{\varepsilon(z_1^{(i)}+z_2^{(i)}+\ldots+z_i^{(i)})} \, \mathfrak{M}_{(i)} \, e^{\varepsilon(z_{i+1}+\ldots+z_n)},$$

où p_i est la probabilité des égalités $z_1 = z_1^{(i)}$, $z_2 = z_i^{(i)}$, $\ldots$, $z_i \neq z_i^{(i)}$ tandis que l'espérance mathématique conditionnelle

$$\mathfrak{M}_{(i)} \, e^{\varepsilon(z_{i+1}+\ldots+z_n)} \geqslant 1$$

à cause de l'inégalité évidente

$$\sum P_k \, e^{\sigma_k} \geqslant 1$$

qui a lieu toutes les fois que $\sum P_k = 1$, $\sum P_k \sigma_k = 0$, $P_k \geqslant 0$.

Donc en faisant la somme $I^{(1)}$ de tous ces termes, en remarquant que $\sum p_i = Q_i$, nous avons à cause de (5):

$$I^{(i)} \geqslant LQ_i,$$

d'où

$$I \geqslant \sum_{i=1}^{n} I^{(i)} \geqslant L \sum_{i=1}^{n} Q_i = LQ,$$

ou bien

$$Q \leqslant \frac{I}{L}. \tag{9}$$

D'autre part, on a

$$\mathfrak{M}_{(i-1)} e^{\varepsilon z_i} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \beta_{i,\, i-1} + \sum_{l=3}^{\infty} \frac{\varepsilon^l}{l!} \mathfrak{M}_{(i-1)} z_i^l$$

et en tenant compte de (3)

$$\mathfrak{M}_{(i-1)} e^{\varepsilon z_i} \leqslant 1 + \beta_{i,\, i-1} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{2} (\varepsilon H)^{l-2} \leqslant 1 + \varepsilon^2 \beta_{i,\, i-1} < e^{\varepsilon^2 \beta_{i,\, i-1}}, \tag{10}$$

en supposant que

$$\varepsilon H \leqslant \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Ainsi, on a à cause de (2)

$$\mathfrak{M}_{(i-1)} e^{\varepsilon z_i} < e^{\varepsilon^2 R_i \beta_i},$$

d'où il résulte que

$$I < e^{\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} R_i \beta_i} = e^{\varepsilon^2 B_n'}. \tag{12}$$

Par conséquent, nous tirons de (9) que

$$Q < \frac{e^{\varepsilon^2 B'_n}}{L}, \tag{13}$$

où Q est la probabilité qu'il y aura au moins une valeur de $i \leqslant n$ pour laquelle

$$\varepsilon(z_1 + z_2 + \ldots + z_i) \geqslant \log L. \tag{14}$$

Or, si l'on pose

$$\log L = t^2 + \varepsilon^2 B_n',$$

les inégalités (14) prennent la forme:

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_i \geqslant \frac{t^2}{\varepsilon} + \varepsilon B_n', \tag{15}$$

et la probabilité correspondante Q satisfait à l'inégalité

$$Q < e^{-t^2}. \tag{16}$$

En particulier, en posant $\varepsilon = \frac{t}{\sqrt{B_n'}}$ [il suffit pour satisfaire à (11) de prendre $t \leqslant \frac{\sqrt{B_n'}}{2H}$] nous arrivons à l'affirmation du théorème.

Observons que le théorème II conduit immédiatement à l'extension de «la loi du logarithme itéré» (pour $B_n \to \infty$) aux grandeurs aléatoires dépendantes qui y figurent; l'énoncé correspondant de «la loi» ne sera pas modifié, si $R_n \to 1$ pour $n = \infty$.

On transforme d'une façon analogue les autres modifications de l'inégalité de Tchebycheff qui se trouvent dans mon article* ,,Sur une modification de l'inégalité de Tchebycheff et sur l'évaluation de l'approximation de la formule de Laplace" et dans mon cours du calcul des probabilités.

Manuscrit reçu
le 14. XI. 1937.

* Ученые записки научно-исследовательских кафедр Украины, Отдел математический (1924).