

# Natural Deduction Examples

$$\{(p \rightarrow q)\} \vdash ((\neg p) \vee q)$$

Proof:

1.	$(p \rightarrow q)$	premise
2.	$(\neg((\neg p) \vee q))$	assumption
3.	$q$	assumption
4.	$((\neg p) \vee q)$	$\vee i: 3$
5.	$\perp$	$\perp i: 2, 4$
6.	$(\neg q)$	$\neg i: 3-5$
7.	$p$	assumption
8.	$q$	$\rightarrow e: 1, 7$
9.	$\perp$	$\perp i: 6, 8$
10.	$(\neg p)$	$\neg i: 7-9$
11.	$((\neg p) \vee q)$	$\vee i: 10$
12.	$\perp$	$\perp i: 2, 11$
13.	$(\neg(\neg((\neg p) \vee q)))$	$\neg i: 2-12$
14.	$((\neg p) \vee q)$	$\neg\neg e: 13$

QED

## Natural Deduction Examples

$\{ (p \rightarrow q) \} \vdash ((\neg p) \vee q)$

Proof: 1.  $(p \rightarrow q)$  premise

$((\neg p) \vee q)$

# Natural Deduction Examples

$\{ (p \rightarrow q) \} \vdash ((\neg p) \vee q)$

Proof: 1.  $(p \rightarrow q)$  premise

2.  $(\neg((\neg p) \vee q))$  assumption

$\perp$

$(\neg(\neg((\neg p) \vee q)))$

$\neg i:$

$((\neg p) \vee q)$

$\neg e:$

# Natural Deduction Examples

$$\{(P \rightarrow Q)\} \vdash ((\neg P) \vee Q)$$

Proof: 1.  $(P \rightarrow Q)$  premise

2.  $(\neg((\neg P) \vee Q))$  assumption

$$((\neg P) \vee Q)$$

$\perp$

$\perp \text{ i: } 2,$

$$(\neg(\neg((\neg P) \vee Q)))$$

$\neg \text{ i:}$

$$((\neg P) \vee Q)$$

$\neg \neg \text{ e:}$

# Natural Deduction Examples

$\{(p \rightarrow q)\} \vdash ((\neg p) \vee q)$

Proof = 1.  $(p \rightarrow q)$  premise

2.  $(\neg((\neg p) \vee q))$  assumption

$(\neg p)$

$((\neg p) \vee q)$

$\perp$

$(\neg(\neg((\neg p) \vee q)))$

$((\neg p) \vee q)$

$\vee i:$

$\perp i: 2,$

$\neg i:$

$\neg\neg e:$

# Natural Deduction Examples

$$\{ (P \rightarrow Q) \} \vdash ((\neg P) \vee Q)$$

Proof: 1.  $(P \rightarrow Q)$  premise

2.  $(\neg((\neg P) \vee Q))$  assumption

$(\neg Q)$

|  $P$

assumption

|  $\perp$

$\perp i:$

$(\neg P)$

$\neg i:$

$((\neg P) \vee Q)$

$\vee i:$

$\perp$

$\perp i: 2,$

$(\neg(\neg((\neg P) \vee Q)))$

$\neg i:$

$((\neg P) \vee Q)$

$\neg\neg e:$

# Natural Deduction Examples

$$\{ (p \rightarrow q) \} \vdash ((\neg p) \vee q)$$

Proof: 1.  $(p \rightarrow q)$  premise

2.  $(\neg((\neg p) \vee q))$  assumption

$(\neg q)$

$p$

assumption

$q$

$\rightarrow e: 1,$

$\perp$

$\perp i:$

$(\neg p)$

$\neg i:$

$((\neg p) \vee q)$

$\vee i:$

$\perp$

$\perp i: 2,$

$(\neg(\neg((\neg p) \vee q)))$

$\neg i:$

$((\neg p) \vee q)$

$\neg\neg e:$

# Natural Deduction Examples

$$\{(p \rightarrow q)\} \vdash ((\neg p) \vee q)$$

Proof: 1.  $(p \rightarrow q)$  premise

2	$(\neg((\neg p) \vee q))$	assumption
	$q$	assumption
	$\perp$	
	$(\neg q)$	$\neg i:$
	$p$	assumption
	$q$	$\rightarrow e: 1;$
	$\perp$	$\perp i:$
	$(\neg p)$	$\neg i:$
	$((\neg p) \vee q)$	$\vee i:$
	$\perp$	$\perp i: 2,$
	$(\neg(\neg((\neg p) \vee q)))$	$\neg i:$
	$((\neg p) \vee q)$	$\neg\neg e:$



# Natural Deduction Examples

$\{(p \rightarrow q)\} \vdash ((\neg p) \vee q)$

Proof:

1.	$(p \rightarrow q)$	premise
2.	$(\neg((\neg p) \vee q))$	assumption
	$q$	assumption
	$((\neg p) \vee q)$	$\vee i:$
	$\perp$	$\perp i: 2,$
	$(\neg q)$	$\neg i:$
	$p$	assumption
	$q$	$\rightarrow e: 1,$
	$\perp$	$\perp i:$
	$(\neg p)$	$\neg i:$
	$((\neg p) \vee q)$	$\vee i:$
	$\perp$	$\perp i: 2,$
	$(\neg(\neg((\neg p) \vee q)))$	$\neg i:$
	$((\neg p) \vee q)$	$\neg\neg e:$

# Natural Deduction Examples

$$\{(p \rightarrow q)\} \vdash ((\neg p) \vee q)$$

Proof =

1.	$(p \rightarrow q)$	premise
2	$(\neg((\neg p) \vee q))$	assumption
3	$q$	assumption
4	$((\neg p) \vee q)$	$\vee i: 3$
5	$\perp$	$\perp i: 2, 4$
6	$(\neg q)$	$\neg i: 3-5$
7	$p$	assumption
8	$q$	$\rightarrow e: 1, 7$
9	$\perp$	$\perp i: 6, 8$
10	$(\neg p)$	$\neg i: 7-9$
11	$((\neg p) \vee q)$	$\vee i: 10$
12	$\perp$	$\perp i: 2, 11$
13	$(\neg(\neg((\neg p) \vee q)))$	$\neg i: 2-12$
14	$((\neg p) \vee q)$	$\neg\neg e: 13$

QED