

# Natural Deduction Examples

$$\textcircled{2} \{(P \rightarrow Q)\} \vdash ((\neg P) \vee Q)$$

Proof:	1	$(P \rightarrow Q)$	premise
	2	$(\neg((\neg P) \vee Q))$	assumption
	3	$(\neg P)$	assumption
	4	$((\neg P) \vee Q)$	$\vee i: 3$
	5	$\perp$	$\perp i: 2, 4$
	6	$(\neg(\neg P))$	$\neg i: 3-5$
	7	$P$	$\neg\neg e: 6$
	8	$Q$	$\rightarrow e: 1, 7$
	9	$((\neg P) \vee Q)$	$\vee i: 8$
	10	$\perp$	$\perp i: 2, 9$
	11	$(\neg(\neg((\neg P) \vee Q)))$	$\neg i: 2-10$
	12	$((\neg P) \vee Q)$	$\neg\neg e: 11$

QED

# Natural Deduction Examples

$$\{(P \rightarrow Q)\} \vdash ((\neg P) \vee Q)$$

1  $(P \rightarrow Q)$  premise

$((\neg P) \vee Q)$

# Natural Deduction Examples

$$\{(P \rightarrow Q)\} \vdash ((\neg P) \vee Q)$$

1	$(P \rightarrow Q)$	premise
2	$(\neg((\neg P) \vee Q))$	assumption
⊥		
	$(\neg(\neg((\neg P) \vee Q)))$	$\neg\neg$
	$((\neg P) \vee Q)$	$\neg\neg E$

# Natural Deduction Examples

$$\vdash (P \rightarrow Q) \vdash \vdash ((\neg P) \vee Q)$$

1	$(P \rightarrow Q)$	premise
2	$(\neg((\neg P) \vee Q))$	assumption
	$((\neg P) \vee Q)$	
	$\perp$	$\perp i$
	$(\neg(\neg((\neg P) \vee Q)))$	$\neg i$
	$((\neg P) \vee Q)$	$\vee e$

# Natural Deduction Examples

$$\vdash (P \rightarrow Q) \vdash \vdash ((\neg P) \vee Q)$$

1	$(P \rightarrow Q)$	premise
2	$(\neg((\neg P) \vee Q))$	assumption
	$Q$	
	$((\neg P) \vee Q)$	$\vee i:$
	$\perp$	$\perp i:$
	$(\neg(\neg((\neg P) \vee Q)))$	$\neg i$
	$((\neg P) \vee Q)$	$\neg\neg e$

# Natural Deduction Examples

$$\{(P \rightarrow Q)\} \vdash ((\neg P) \vee Q)$$

1	$(P \rightarrow Q)$	premise
2	$(\neg((\neg P) \vee Q))$	assumption
	$P$	
	$Q$	$\rightarrow e: 1,$
	$((\neg P) \vee Q)$	$\vee i:$
	$\perp$	$\perp i:$
	$(\neg(\neg((\neg P) \vee Q)))$	$\neg i$
	$((\neg P) \vee Q)$	$\neg\neg e$

# Natural Deduction Examples

$$\{(P \rightarrow Q)\} \vdash ((\neg P) \vee Q)$$

1	$(P \rightarrow Q)$	premise
2	$(\neg((\neg P) \vee Q))$	assumption
3	$(\neg P)$	assumption
	$\perp$	
	$(\neg(\neg P))$	$\neg i: 3-$
	$P$	$\neg\neg e:$
	$Q$	$\rightarrow e: 1,$
	$((\neg P) \vee Q)$	$\vee i:$
	$\perp$	$\perp i:$
	$(\neg(\neg((\neg P) \vee Q)))$	$\neg i$
	$((\neg P) \vee Q)$	$\neg\neg e$

# Natural Deduction Examples

$$\{(P \rightarrow Q)\} \vdash ((\neg P) \vee Q)$$

1	$(P \rightarrow Q)$	premise
2	$(\neg((\neg P) \vee Q))$	assumption
3	$(\neg P)$	assumption
4	$((\neg P) \vee Q)$	$\vee i: 3$
	$\perp$	$\perp i: 2, 4$
	$(\neg(\neg P))$	$\neg i: 3-$
	$P$	$\neg\neg e:$
	$Q$	$\rightarrow e: 1,$
	$((\neg P) \vee Q)$	$\vee i:$
	$\perp$	$\perp i:$
	$(\neg(\neg(\neg P) \vee Q))$	$\neg i$
	$((\neg P) \vee Q)$	$\neg\neg e$



# Natural Deduction Examples

$$\vdash (P \rightarrow Q) \vdash \vdash ((\neg P) \vee Q)$$

1	$(P \rightarrow Q)$	premise
2	$(\neg((\neg P) \vee Q))$	assumption
3	$(\neg P)$	assumption
4	$((\neg P) \vee Q)$	$\vee i: 3$
5	$\perp$	$\perp i: 2, 4$
6	$(\neg(\neg P))$	$\neg i: 3-5$
7	$P$	$\neg\neg e: 6$
8	$Q$	$\rightarrow e: 1, 7$
9	$((\neg P) \vee Q)$	$\vee i: 8$
10	$\perp$	$\perp i: 2, 9$
11	$(\neg(\neg(\neg((\neg P) \vee Q))))$	$\neg i: 2-10$
12	$((\neg P) \vee Q)$	$\neg\neg e: 11$

QED