Techniques de l'Informatique, des Mathématiques, de la Microélectronique et de la Microscopie quantitative.
Unité associée au C.N.R.S. n° 397

TIM3/INPG - 46 Avenue F. VIALLET - 38041 Grenoble cedex

FACTORISATION D'OPERATEURS DIFFERENTIELS DU SECOND ORDRE

J. DELLA-DORA S. WATT

RR 634 -M- Novembre 1986

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Ce travail (premier d'une série sur ce sujet) a pour but de compléter une méthode de factorisation des opérateurs différentiels du second ordre à coefficients polynomiaux initialement proposée par LAFFERTY.

This work is dedicated to the factorization of second order linear differential operators. Its purpose is to complete a method due to LAFFERTY.

Keywords : Second order differential operators
Factorization of O.D.E.

FACTORISATION D'OPERATEURS DIFFERENTIELS DU SECOND ORDRE

PREMIERE PARTIE

J. DELLA DORA
Laboratoire TIM 3

S. WATT
I.B.M T. Watson Center
Yorktown Heights

INTRODUCTION

Le problème de la factorisation des opérateurs différentiels (en particulier du second ordre) a été considéré (et théoriquement résolu) depuis de très longues années. Le but de cet article est de compléter les algorithmes qui ont été proposés en calcul formel sur ce sujet, mettre le point sur de nouveaux algorithmes et soulever quelques questions qui mériteraient de plus profondes études.

Sans conteste l'intéret pour ces questions remonte a un travail de FROBENIUS (Frobenius 1873), complété par **Königsberger,** LANDAU, FLOQUET (Floquet 1879), BRODETSKY (Brodetsky 1916), CAYLEY (Cayley 1886), et tant d'autres.

A la connaissance des auteurs, l'intêret de ces questions pour le calcul formel apparaît uniquement dans un travail (très incomplet comme nous le verrons) de LAFFERTY (Lafferty XXX). Cependant ce travail a le mérite de mettre le point sur une méthode qui présente un intêret certain, par rapport à d'autres méthodes dont nous parlerons.

Le plan de ce travail sera le suivant :

1 - équation de RICCATI associée à une équation du second ordre

2 - solutions polynomiales d'une équation de RICCATI

3 - algorithme de factorisation

PARAGRAPHE 1 : EQUATION DE RICCATI ASSOCIEE A UNE EQUATION DIFFERENTIELLE DU SECOND ORDRE

Soit $L = a\partial^2 + b\partial + c$ un opérateur différentiel du second ordre appartenant à $k[x](\partial)$, k étant un corps.

Si nous cherchons à factoriser L dans $k[x](\partial)$ nous devons déterminer quatre polynômes A, B, C, D appartenant à $k[x]$ tels que :

$$L = (A\partial + B)\,(C\partial + D)$$

Afin d'éviter l'introduction de coefficients parasites nous pouvons toujours supposer que :

1 - PGCD (A, B) = PGCD (C, D) = 1
2 - PGCD (a, b, c) = 1

L'identification $a\partial^2 + b\partial + c = (A\partial + B)\,(C.\partial + D)$ conduit à poser

$$(I) \qquad \begin{cases} a = AC \\ b = AC' + BC + AD \\ c = BD + AD' \end{cases}$$

(nous notons par un ' la dérivée du polynôme considéré)

Le problème qui se pose est donc de déterminer A, B, C, D à partir de (I)

L'idée intéressante ici est de chercher une relation que doit vérifier :

$$(II) \qquad u = A.\,D.$$

([E.D. Rainville 1941])

Montrons que u vérifie une équation de RICCATI :

$$\begin{aligned} a' - b &= (A'C + AC') - (AC' + BC + AD) \\ &= A'C - BC - u \end{aligned}$$

d'où $\qquad (a' - b)u = A'ACD - ABCD - u^2$

$$ac = ABCD + ACAD'$$
$$= ABCD + (u' - A'D)\,AC$$

En faisant la somme des deux expression on trouve :

$$\textbf{(III)} \qquad \mathbf{au' = u^2 + (a - b)\,u + ac}$$

Le premier problème qui se pose donc est :

(III) admet elle une solution polynomiale ?

On sait répondre à cette question (JC. CAMBELL 1952) et (JC. CAMBELL et M. GOLOMB 1954)

PARAGRAPHE 2 : SOLUTIONS POLYNOMIALES D'UNE EQUATION DE RICCATI

Nous allons dans ce paragraphe traiter le problème des solutions polynomiales pour l'équation :

$$fu' = u^2 + gu + h$$

(f, g, h appartenant à k[x])

en notant $\quad f = f_0\, x^n + \dots + f_n$

$$g = g_0\, x^m + \dots + g_m$$
$$h = h_0\, x^p + \dots + h_p$$

et en cherchant une solution sous la forme :

$$u = u_0\, x^q + \dots + uq$$

1 - cas : $m < n - 1$ deux sous cas sont à distinguer :

1.1 - $p \leq 2(n-1)$ alors par identification on pourra choisir parmi deux possibilités

1.1.1 - $n + q - 1 = 2q$ c'est-à-dire

$$q = n - 1$$

soit

1.1.2 - $n + q - 1 = p$ ce qui entraîne

$$q = p - n + 1$$

Donc, à priori, deux solutions sont possibles

1.2 - $p > 2(n-1)$ dans ce cas il n'y a qu'un seul choix possible qui est :

$$q = {}^{p}/_{2}$$

(en particulier si p est impair il n'y a pas de solution)

2 - Cas : $m \geq n-1$ Là aussi deux cas sont à distinguer

1.1 - $p \leq 2m$ nous avons deux possibilités

1.1.1 - $2q = m + q$ donc

$$q = m$$

soit

1.1.2 - $m + q = p$ donc

$$q = p - m$$

1.2 - $p > 2m$ une solution rest possible dans ce cas là, elle est donnée par

$$q = {}^{h}/_{2}$$ (mêmes remarques que plus haut)

3 - Cas : cas singulier

Le cas singulier résulte de la possibilité d'imposer :

$$n + q - 1 = m + q$$

Cela conduit à une solution à condition que soient aussi vérifiées les conditions suivantes :

C1) $a_0 q u_0 = b_0 u_0$ donc ao q = bo
Ceci n'étant possible que si b_0/a_0 est un entier positif

C2) $p < m + q$ ce qui se traduit par $p < m + b_0/a_0$

C3) $2q < m + q$ soit $b_0/a_0 < m$

Si cela est réalisé alors nous pouvons avoir toute une famille de solutions polynomiales qui dépendent du paramètre u_0.

La démonstration des résultats annoncés est évidente.

L'algorithme de recherche d'une éventuelle solution polynomiale procède d'une méthode de subtitution : on pose

$$\mathbf{u = u_0\, x^q + v}$$

ou v sera un polynôme de degré strictement inférieur à q et l'on substitue dans l'équation de RICCATI. Cela conduit à :

$$\mathbf{f\ (u_0\, x^q + v)' = (u_0\, x^q + v)^2 + g\,(u_0\, x^q + v) + h}$$

Si l'on peut déterminer le couple (u_0,q) alors on sera conduit après substitution à une équation de RICCATI du même type que précèdemment et l'on recommencera.

On divise donc la discussion en deux :

1 - <u>Discussion de l'existence du couple (u_0,q)</u>

2 - <u>Itération</u>

Cette deuxième partie est évidente, on écrira $v = v_0\, x^{q-1} + w$ et l'on recommence. On peut décrire directement les divers coefficients des équations de Ricatti successive mais cela ne présente que peu d'intèret.

Ceci clot donc la première partie de la discussion, qui montre comment construire une solution polynomiale à l'équation de RICCATI donnée.

PARAGRAPHE 3 - ALGORITHME DE FACTORISATION

Le précédent paragraphe nous a montré comment contruire (si elle existe) une solution polynomiale à l'équation (3) mais cela ne répond pas entièrement à la question initiale.

A partir d'une éventuelle solution polynomiale u de (3) il faut ensuite reconstruire A, B, C, D. Nous allons pour cela utiliser une méthode différente de celle proposée par (Lafferty...) et qui est plus directe.

On doit en effet vérifier les conditions suivantes :

$$u = AD \qquad (\alpha)$$
$$a = AC \qquad (\beta)$$
$$b = AC' + BC + AD \qquad (\gamma)$$
$$c = BD + AD' \qquad (\delta)$$

a, b, c, ayant la signification du paragraphe 1

L'intèret de la normalisation choisie est de nous conduire immédiatement aux équations :

$$A = \mathrm{PGCD}\,(u,a)$$
$$D = u/A$$
$$C = a/A$$

Ceci se déduisant de (α) et (β) . Il reste ensuite deux équations (γ) et (δ) pour déterminer B ; donc deux équations pour une indéterminée. Cependant nous allons voir que (γ) et (δ) sont équivalentes.

En effet, considérons (δ) qui peut s'écrire :

$$c = BD + u' - A'D \qquad \text{(après dérivation de } (\alpha))$$

soit

$$c - u' = D\,(B - A')$$

Cette équation est équivalente à :

$$\begin{aligned} a.\,(c - u') &= aD\,(B - A') \\ &= ACD\,(B - A') && \text{(d'après } (\beta)) \\ (*) \qquad &= uC\,(B - A') && \text{(d'après } (\alpha)) \end{aligned}$$

Or u vérifie l'équation $au' = u^2 + u\,(a' - b') + ac$ soit

$$(**) \quad a\,(u' - c) = u\,(a' - b + u)$$

donc en comparant (*) et (**) on obtient :

$$u\,(-u - a' + b) = uC\,(B - A')$$

donc si $u \neq 0$

$$b - a' - u = C\,(B - A')$$

Or (γ) est équivalente à (en dérivant (β) et en reportant)

$$b - a' - u = C\,(B - A')$$

donc (γ) est équivalente à (δ)

Il reste donc une unique équation que nous écrirons sous la forme

$$c - u' = D\,(B - A')$$

Si donc D divise **c - u'** (qui se trouve donc être la condition de compatibilité à vérifier)

On a immédiatement :

$$B = A' + c - u'/_D$$

donc

THEOREME

Si l'équation de RICCATI (III) admet une solution polynomiale u et si la condition suivante est réalisée

$$^{u}/_{PGCD\,(u,a)} \qquad \textbf{divise } c - u'$$

alors on peut trouver une factorisation de l'opérateur

$$L = a\partial + b\partial + c$$

sous la forme

$$L = (A\partial + B)\,(C\partial + D)$$

avec

$$A = PGCD\ (u,a)$$
$$D = {}^{u}/a$$
$$C = {}^{a}/A$$
$$B = A' - c - {}^{u'}/D$$

Exemple

Considérons la famille d'opérateurs différentiels :

$$L_{\alpha,\beta,\theta} = (x - \alpha)\,(x - \beta)\partial 2 - \theta$$

où α, β, θ, désignent trois élèments d'un corps k.
Nous voulons savoir quels sont les éléments de cette famille qui soient factorisables (au sens de cet article)

On obtient immédiatement l'équation de RICCATI associée

$$(x - \alpha)\,(x - \beta)\,u' = u^2 + (2x - (\alpha + \beta))u - \theta\,(x - \alpha)\,(x - \beta)$$

avec les notations du papier **n = 2, m = 1 et p = 2**

Nous sommes dans le deuxième cas **m = n - 1 et p = 2m** nous avons donc deux possibilités **q = m = 1 ou q = p - m = 1** donc cela se réduit à l'existence d'une solution polynomiale possible

$$\mathbf{u = u_0 x + u_1}$$

La méthode la plus simple est d'identification, ce qui conduit à

1- $u_0^2 + u_0 - \theta = 0$
2- $u_1 = - {}^{u_0}/_2 \, (\alpha + \beta)$
3- $u_1^2 - (\alpha + \beta)u_1 - \alpha\beta \, (\theta + u_0) = 0$

La condition 3 peut se réécrire compte tenu de 2 et 1 :

$$\theta + {}^{u_0}/_4 \, [(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta] = 0$$

Ce qui se décompose en :

1- $u_0 = - \theta$
2- $(\alpha + \beta)^2 = 4\alpha\beta$

<u>Discutons sur ces deux conditions</u> :

<u>1° condition</u> : $u_0 = - \theta$ comme l'on doit avoir $u_0^2 + u_0 - \theta = 0$ cela suppose
$\theta = 2$ ou $\theta = 0$ (cas travail)
Si $\theta = 2$ alors on a $u_0 = - 2$ et $u_1 = (\alpha + \beta)$
La famille de solutions possibles est donc :

$$\mathbf{u = - 2x + (\alpha + \beta)}$$

Il faut ensuite vérifier que cette solution permet une factorisation.

On a $a = (x - \alpha)(x - \beta)$ donc d'après le théorème précédent :

$$A = \mathbf{PGCD}\,((x - \alpha)(x - \beta), -2x + (\alpha + \beta))$$

deux possibilités :

1.1 - si $\alpha \neq \beta$ alors $A = 1$

1.2 - si $\alpha = \beta$ alors $A = x - \alpha$

Le cas 1.1 entraîne $D = -2x + (\alpha + \beta)$ et comme $c - u' = 0$
on a absolument $B = 0$ ∂ ou la factorisation

$$(x - \alpha)(x - \beta)\,\partial^2 - 2 = \partial\,((x - \alpha)(x - \beta)\partial - 2x + (\alpha + \beta))$$

qui est une décomposition non triviale.

Le cas 1.2 entraîne $D = -2$ et $C - u' = 0$ donc $B = 1$ et l'on obtient la décomposition non triviale :

$$(x - \alpha)^2\,\partial^2 - 2 = ((x - \alpha)\partial + 1)\,((x - \alpha)\partial - 2)$$

<u>2° Condition</u> : elle correspond au cas particulier $(\alpha + \beta)^2 = 4\alpha\beta$ c'est-à-dire $\alpha = \beta$

On trouve immédiatement :

$$u_0^2 + u_0 - \theta = 0$$
$$u_1 = -u_0\,\alpha$$

donc

$$u = u_0\,(x - \alpha)$$
$$a = (x - \alpha)^2$$

entraîne

$$A = x - \alpha$$
$$D = u_0$$
$$C = x - \alpha$$

Comme D est une constante, il divise forcément c - u' donc on peut construire :

$$B = 1 + {}^{-\theta - u_o}/u_o = -{}^{\theta}/u_o = -(u_o + 1)$$

et l'on obtient la décomposition

$$(x - \alpha)^2 \partial^2 - \theta = ((x - \alpha)\partial - {}^{\theta}/u_o) ((x - \alpha)\partial + u_o)$$

avec u_o lié à θ par

$$\theta = u_o^2 + u_o$$

donc deux décompositions possibles si θ est donné).

BIBLIOGRAPHIE

(E.D. RAINVILLE 1941)

E.D. RAINVILLE The factorisation of certain second order polynomial differential operators
American Mathematical Monthly vol. 48 - 1941 - p. 519 - 521.

(J.G. CAMPBELL - M. GOLOMB 1954)

JG CAMPBELL et M. GALOMB On the polynomial solutions of a Riccati Equation
American Mathematical Monthlyvol. 61 - 1954 - p. 402 - 404

(J.G. CAMPBELL - 1951)

J.G. CAMPBELL A criterion for the polynomial solutions of a certain Riccati Equation
American Mathematical Monthly vol. 61 - 1952 - p. 388 - 389

(O. ORE 1933)

O. ORE Theory of non-commutative polynomials

(FG. FROBENIUS)

Uber den begriff der Irreductibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichurigen.
Journal für die reine und angewandte Mathematik 76 236-270 (1873)

(G. FLOQUET)

Theorie des équations différentielles linéaires.
Annales de l'Ecole Normale
Supplément 1879 p. 1-132

(S. BRODETSKY)

Sur une analogie entre les équations linéaires différentielles et les équations Algébriques.
C.R.A.S. 31/1/1916 p. 191 - 194

(C. KAYLEY)

On linear differential equations
Quarterly Journal of Pure and applied mathematics -
Vol. XXI 1886 p. 331 - 335